Gap non-standard

Késako ?

Voici un jeu, intitulé « gap non-standard », qui permet de détecter si votre interlocuteur a un entendement non-standard, ou - et c'est peut-être la même chose - si c'est en secret un théoricien ou une théoricienne des ensembles.

C'est un jeu à deux joueurs, Alice et Bob, jouant tour à tour. Au $(n+1)$-ième tour, Alice définit un ordinal $\alpha_n > 0$, puis Bob propose un ordinal β_n, avec comme contraintes que

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > \cdots \geqslant \beta_n \geqslant \cdots \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_0. \tag{1}$$

Alice perd la partie au n-ième tour si Bob lui soumet une stratégie gagnante avec garantie qu'en au plus un nombre $f(n) > 0$ déterminé de tours après le n-ième, Alice ne pourra pas prolonger sa suite en respectant les contraintes[1].

Bob perd la partie s'il abandonne ou meurt de soif.

Exemple. Alice joue le nombre ω^ω ;

Bob joue ω^2 ;

Alice joue ω^{10000} ;

Bob joue $\omega^{9999} + 1$;

Alice joue $\omega^{9999} + \omega^{9998}$;

Bob joue $\omega^{9999} + \omega^{9997} + \omega^{9996}$;

Alice joue $\omega^{9999} + \omega^{9997}\, 2 + \omega^{9996}\, 3 + \omega^{9995}\, 4 + \cdots + \omega^{1221}\, 8778$.

Bob propose alors la stratégie gagnante suivante:

Si Alice vient de jouer

$$\alpha_n = \sum_{k \leqslant 9999} \omega^k\, a_n(k)$$

où $a_n \in \mathbb{N}^{10000}$, alors Bob jouera

$$\beta_n := \sum_{k \leqslant 9999} \omega^k\, b_n(k),$$

où b_n est le prédécesseur de a_n dans $[\![0; \max\{a_n(k) : k \leqslant 9999\}]\!]^{10000}$ pour l'ordre lexicographique qu'il faut. Bob annonce avec preuve qu'Alice aura perdu en au plus 1222 tours supplémentaires.

Question 1. Existe-t-il une stratégie gagnante pour Bob? L'ordinal α_0 étant fixé, existe-t-il une stratégie gagnante pour Bob? Si non, quel est donc le plus petit ordinal α_0 pour lequel Bob ne dispose d'aucune stratégie gagnante?

Question 2. Existe-t-il une stratégie gagnante pour Alice?

Question 3. Que vaut le plus petit choix possible de $f(0)$ pour Bob en fonction de α_0?

Remarque. Je n'ai jamais perdu[2] à gap non-standard.

1. c'est-à-dire qu'on aura nécessairement $\alpha_{n+k} = \beta_{n+k-1} + 1$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, f(n)\}$
2. joué